PROGRAMME DE COLLE - SEMAINE n° 3: du 30/10/2024 au 04/10/2024

Connaissances minimales attendues

Chapitre 2 - Suites réelles : révisions et compléments

Se reporter à un programme de colle précédent.

Chapitre 3 - Espaces vectoriels (révisions de ECG1)

- Loi de composition interne, loi de composition externe sur un ensemble ;
- Définition d'un espace vectoriel réel ;
- Règles de calculs complémentaires dans un espace vectoriel ;
- Définition et description complète des espaces vectoriels de référence $(\mathbb{R}^n, +, .)$, $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), +, .)$, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, .)$, $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$, $(\mathcal{A}(D, \mathbb{R}), +, .)$ (avec $D \subset \mathbb{R}$) **(HP)** ;
- Famille de vecteurs d'un espace vectoriel ;
- Combinaison linéaire de vecteurs d'un espace vectoriel ;
- Stabilité de tout espace vectoriel par combinaison linéaire ;
- Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel : définition, caractérisation classique « en trois points » ;
- L'ensemble-solution d'un système linéaire homogène comportant n lignes et p colonnes est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$;
- **(HP)** Le commutant de toute matrice carrée d'ordre n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, notation vect(...), divers exemples ;
- Famille génératrice d'un espace vectoriel, opérations transformant une famille génératrice en une nouvelle famille génératrice, « simplification de " vect " » ;
- Famille libre/liée : définition et exemples ;
- **(HP)** Vecteurs colinéaires ;
- **(HP)** Toute famille comportant 2 vecteurs colinéaires est liée ;
- Caractérisation de la liberté par l'unicité de l'écriture comme combinaison linéaire d'éléments de la famille considérée ;
- Liberté de toute famille réduite à un vecteur non nul ;
- **(HP)** Liberté de toute famille de vecteurs de $\mathbb{R}_p[X]$ (pour un certain $p \in \mathbb{N}$) échelonnée en degrés ;
- Base d'un espace vectoriel : définition ;
- Caractérisation des bases d'un espace vectoriel E par l'existence et l'unicité de l'écriture de tout vecteur de E comme combinaison linéaire des éléments de la famille) ;
- Coordonnées d'un vecteur d'un espace vectoriel E dans une base $\mathcal{B}$ de E ;

- Base canonique des espaces vectoriels de référence $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$;
- Espace vectoriel de dimension finie ;
- Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ;
- **(HP)** Théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite ;
- Une famille libre dans un espace vectoriel de dimension n comporte au plus n vecteurs ;
- Une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension n comporte au moins n vecteurs ;
- Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E :
  * Si $\mathcal{F}$ est libre dans E et comporte n vecteurs, alors $\mathcal{F}$ est une base de E ;
  * Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E et comporte n vecteurs, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
- Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors E est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$;
- Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, et si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Savoir-faire et Méthodes à savoir appliquer

« Les incontournables »

- « Les incontournables » du programme de colle précédent sont toujours au programme ;
- Effectuer des calculs dans les espaces vectoriels de référence ;
- Montrer qu'un vecteur d'un espace vectoriel $(\mathsf{E},+,.)$ s'écrit/ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire d'une famille de vecteurs de E donnés ;
- Montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E :
  * ... en identifiant un espace vectoriel de référence ;
  * ... en utilisant la caractérisation dite « en 3 points » ;
  * ... en montrant qu'il existe une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E tels que $\mathsf{F} = \mathsf{Vect}(\mathcal{F})$.
- Montrer qu'un ensemble F peut être muni d'une structure d'espace vectoriel :
  * ... en reconnaissant un espace vectoriel de référence ;
  * ... en montrant que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence que l'on identifiera clairement ;
- Manipuler et comprendre parfaitement la notation vect (écriture, simplifications d'écriture etc) ;
- Montrer qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $(\mathsf{E},+,.)$ donné est/ n'est pas génératrice d'un espace vectoriel $(\mathsf{E},+,.)$ donné.
- Montrer qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E est libre/liée dans E ;

« Et plus si affinités ... »

- Déterminer de manière autonome un équivalent d'une suite implicite ou définie par une relation de récurrence ;
- Déterminer de manière autonome un développement asymptotique d'une suite implicite ou définie par une relation de récurrence ;
- Manipuler la définition formelle de la convergence, divergence, de la négligeabilité, de l'équivalence ;
- Manipuler les définitions formelles du chapitre Espaces vectoriels afin de montrer des résultats théoriques généraux ;

Preuves exigibles

Propositions

1. Caractérisation de la convergence d'une suite par la convergence de la suite des termes de rang pair et de la suite des termes de rang impair vers la même limite **[A]**.

2. **(HP)** Une suite réelle convergente est bornée **[C]**.

3. Théorème d'encadrement (dans le contexte des suites) **[A]**.

4. Théorème de comparaison (dans le contexte des suites) **[A]**.

5. Théorème de convergence des suites adjacentes **[A]**.

6. Caractérisation « pratique » de l'équivalence de deux suites **[C]**.

7. Si deux suites sont équivalentes et si l'une de ces deux suites est positive à partir d'un certain rang, alors l'autre l'est également **[A]**.

8. Si $(E, +, .)$ est un espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, ..., e_p)$ une famille de p vecteurs de E, alors vect $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est un sous-espace vectoriel de E **[A]**.

9. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$ **[C]**.

10. La famille $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ est une base de l'espace vectoriel de référence $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ **[A]**.

11. Toute famille réduite à un vecteur non nul d'un espace vectoriel E est libre **[C]**.

12. **(HP)** Toute famille de polynômes à degrés échelonnés est libre **[A]**.

13. Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda . 0_E = 0_E$ **[A]**.

14. Une famille de vecteurs est liée si et seulement si il existe un vecteur de cette famille qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille **[A]**.

15. Caractérisation de la liberté d'une famille par l'unicité de l'écriture comme combinaison linéaire (sous réserve d'existence) **[C]**+**[A]**.

16. Caractérisation de la notion de base par l'existence et l'unicité de l'écriture comme combinaison linéaire de tout vecteur **[A]**.

17. Invariance du cardinal de toute base d'un espace vectoriel de dimension finie donné **[A]**.

18. Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et vérifie $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ **[A]**.

Exemples/ exercices

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ **[C]**.

2. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$ **[C]**.

3. Une suite d'entiers est convergente si et seulement si elle est stationnaire **[TD]**.

4. Détermination de l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x) \quad \textbf{[TD]}$$

5. $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **[C]**.

6. Pour tout $n \geqslant 1$, on note (E_n) l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_n) :\ x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$$

   Alors :

   - Pour tout $n \geqslant 1$, (E_n) possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, notée u_n **[C]**.
   - $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante **[C]** .
   - $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\sqrt{2}-1$ **[Ac]**.

7. Pour tout $n \geqslant 3$, on note (E_n) l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_n) :\ xe^{-x} = \frac{1}{n}$$

   Alors :

   - Pour tout $n \geqslant 3$, (E_n) possède une unique solution dans $[0,1]$, notée u_n **[Ac]**.
   - $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante **[Ac]**.
   - $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge de limite nulle **[Ac]**.
   - $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ **[Ac]**.

8. Pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $S_A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \;\middle|\; AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), +, .)$ **[C]**.

9. **(HP)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le commutant de la matrice A est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, .)$ **[C]**.

10. On considère l'ensemble

$$G_3 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P(0) = P'(1) = 0 \right\}$$

   - Montrer que G_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ **[C]**.
   - Déterminer une famille génératrice de G_3 **[C]**.
   - Déterminer une base et la dimension de G_3 **[C]**

[A] : Annexe **Preuves** ;
[C] : Preuve traitée au tableau **en cours** ;
[Ac] : Annexe **Corrections**

Informatique

Tout le contenu des polycopiés **TP1 - Cours (rappels)** et **TP1 - Exercices** sont au programme de cette semaine (y compris toutes les extensions hors-programme **(HP)**).
On pourra proposer aux étudiants des questions de cours d'informatique (en ciblant un ou deux items du polycopié de cours) et/ou des exercices (en proposant un exercice présent dans le polycopié d'exercices).

Quelques remarques destinées aux colleurs

- La colle commencera par quelques questions de cours (restitution d'une définition, d'une proposition/théorème, d'une ou des méthodes de base) ;
- On pourra demander aux élèves de prouver un des théorèmes (de manière complète ou incomplète) répertoriés dans la rubrique **Preuves exigibles** et tester la compréhension des élèves à propos de ce qu'ils écrivent ;
- Le premier exercice sera de difficulté modérée, non théorique et sera essentiellement calculatoire ;
- On pourra proposer une étude complète d'une suite (définie par une relation de récurrence d'ordre 1, ou définie implicitement) ;
- Tous les élèves devront rencontrer dès leur premier exercice d'algèbre la notation Vect dans une situation simple ;
- On rappelle que suite à la dernière réforme des programmes :
  - les espaces vectoriels des fonctions (en particulier, l'espace vectoriel des suites réelles) sont hors-programme ;
  - tous les espaces vectoriels considérés en ECG Maths Appli sont (présupposés) de dimension finie ;

  $\Rightarrow$: On ne proposera donc pas d'exercices relatifs aux espaces vectoriels de dimension non finie.
- Les exercices proposés devront être de niveau progressif ;
- On accordera un soin tout particulier à la rédaction et à la rigueur ;
- Toute erreur répertoriée dans le document Erreurs graves sera lourdement sanctionnée ;
- Si l'élève interrogé ne répond pas correctement aux questions de cours, on attribuera une note strictement inférieure à la moyenne, et ce indépendamment de la suite de l'interrogation orale.